На правах рукописи

ГОГИН Алексей Павлович

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ И ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЛЯ СМЕШАННЫХ МЕТОДОВ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.07 – вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2014

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики федерального государственного автономного учреждения высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Карчевский Михаил Миронович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Копысов Сергей Петрович
	доктор физико-математических наук профессор Вабищевич Петр Николаевич
Ведущая организация:	Национальный исследовательский университет "МЭИ"(г. Москва)

Защита диссертации состоится «24» апреля 2014 г. в 14.30 на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 по защите диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук при Казанском федеральном университете (420008, г. Казань, ул. Кремлёвская, 18, корпус 2, ауд. 218).

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета.

Автореферат разослан «24» февраля 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Метод конечных элементов в настоящее время является одним из основных инструментов для решения различных задач математической физики. Среди преимуществ этого метода, сочетающего в себе лучшие качества разностных и вариационных методов: универсальность, сравнительная простота применения в областях сложной формы, использование различных сеток, удобство для программирования.

Классические схемы метода конечных элементов подразумевают использование лагранжевых и эрмитовых элементов. Объем вычислительной работы при реализации таких методов в общем случае может быть очень большим. Кроме того, часто при решении конкретных задач математической физики возникает необходимость в вычислении различных неизвестных, связанных с производными искомого решения. Такими неизвестными могут быть: поток в задачах термодинамики, напряжение в задачах теории упругости, изгибающие моменты в задачах об изгибе тонких пластин и т.д. Использование классических методов в этом случае приводит к разрывной аппроксимации этих неизвестных. На пути решения данных проблем были предложены специальные разновидности схем МКЭ: смешанные методы конечных элементов (СМКЭ), а также смешанно-гибридные и гибридные схемы. Одним из главных преимуществ таких схем является возможность использования простейших конечных элементов. Это становится возможным благодаря снижению порядка уравнений при помощи введения вспомогательных неизвестных, которое в свою очередь осуществляется за счет использования двойственной или смешанной переформулировки исходной задачи. В работах И. Бабушки, Ж.П. Обена, Х.Г. Бушара, М. Круазье и П.А. Равьяра впервые были изучены такие методы. Позднее подобный анализ был проведен в работах И. Бабушки, Я. Хаслингера, И. Главачека, Ф. Кикути, М. Фортина.

В работах П.А. Равьяра, Ж.М. Тома, Д.Н. Арнольда, Ф. Бреззи, Дж. Дугласа, Л.Д. Марини, Ж.Е. Робертс были построены различные пространства треугольных и прямоугольных конечных элементов для аппроксимации смешанных схем, получены соответствующие оценки точности. Ж.К. Неделек обобщил эти результаты для трехмерного случая. Кроме того, СМКЭ для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений, отличных от рассмотренных в настоящей диссертации, рассматривались Дж. Дугласом, Ж.Е. Робертс и Ф.А. Милнером.

СМКЭ применяются для решения различных уравнений высоких порядков. Например, СМКЭ для решения задач о пластине были рассмотрены в работах Л. Херманна, К. Джонсона, К. Хеллана. Конечноэлементные схемы смешанного типа также используются при решении различных задач теории оболочек, которые рассматривались в работах Л.Ш. Заботиной, М.М. Карчевского и других.

Для аппроксимации решений задач Стокса и Навье—Стокса также представляется естественным использовать СМКЭ. Изучению таких методов посвящены, например, работы В. Жиро и П.А. Равьяра, М. Фортина, Р. Стенберга, M. Farhloul, H. Manouzi.

Теория смешанных методов для линейных и различных классов нелинейных эллиптических уравнений второго порядка в пространствах $W_2^{(1)}$ развита к настоящему времени достаточно полно. Значительно слабее изучены теоретические вопросы СМКЭ для эллиптических уравнений в пространствах $W_p^{(1)}$. Так, в работах M. Farhloul и H. Manouzi предложена и исследована конечноэлементная схема смешанного типа для частного случая задачи с сильно монотонным оператором, часто называемой уравнением с p-лапласианом, в пространстве $W_p^{(1)}$. Исследованию СМКЭ для общих дивергентных квазилинейных эллиптических уравнений с сильно монотонными операторами в пространстве $W_p^{(1)}$ посвящены работы А.Е. Федотова и М.М. Карчевского. В этих работах получены оценки точности смешанных схем, основанных на использовании потока, т. е. функции $a(x, u, \nabla u)$, в качестве вспомогательной переменной. Отметим, что в настоящей работе рассмотрена иная конечноэлементная схема: в качестве вспомогательной переменной при постановке смешанной задачи выбирался градиент искомого решения. Смешанные схемы для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с монотонными операторами в пространстве $W_2^{(1)}$ рассмотрены в работах М.М. Карчевского и А.Е. Федотова. Полученные в них результаты обобщены в данной диссертации на случай пространства $W_p^{(1)}$.

Многие важные практические задачи приводят к квазилинейным эллиптическим уравнениям второго порядка с монотонными операторами. К ним относится, например, задача с нелинейным вырождающимся по нелинейности оператором, возникающим при описании фильтрации жидкости, следующей закону фильтрации с предельным градиентом.

Различные итерационные процессы для смешанных методов конечных элементов изучались в работах М.М. Карчевского, А.Е. Федотова. В данной диссертации предложены модификации построенных ими итерационных процессов, которые существенно уменьшают объем вычислительной работы, оценки скорости сходимости при этом сохраняются.

Целью диссертации является построение смешанных схем метода конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с монотонными и сильно монотонными операторами в пространстве $W_p^{(1)}$, исследование условий разрешимости и сходимости схем, получение оценок точности смешанной схемы для задачи с сильно монотонным оператором, построение и исследование итерационных методов численной реализации смешанных схем МКЭ.

Методы исследования. В работе использованы фундаментальные положения функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, теории методов конечных элементов. Все результаты, полученные в диссертации, верны и подтверждены строгими математическими доказательствами и численными экспериментами для модельных задач.

Научная новизна. Исследованы смешанные методы конечных элементов для квазилинейных эллиптических задач второго порядка с монотонными и сильно монотонными операторами в пространствах $W_p^{(1)}$. А именно, в случае монотонного оператора доказаны разрешимость дискретной задачи, слабая сходимость решений приближенной задачи, сильная сходимость «потоков» $a(x, u_h, j_h(u_h))$, построенных по решению приближенной задачи. Для уравнений с сильно монотонным оператором показаны существование и единственность решения дискретной задачи. Получены оценки точности метода. Кроме того, предложены модификации известных (см. [1]) итерационных процессов, исследована сходимость таких модифицированных процессов.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при численном решении конкретных прикладных задач, при теоретическом исследовании смешанного метода конечных элементов для нелинейных задач, в учебном процессе.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, г. Алушта, Крым, 25–31 мая 2011 года; Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование». Ижевск, 15–18 мая 2012 года; Девятой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения». Казань, 17–22 сентября 2012 года; XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным программным системам, г. Алушта, Крым, 22–31 мая 2013 года; XII Всероссийской молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения-2013». Казань, 24–29 октября 2013 года; Итоговых научных конференциях КФУ.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ, в том числе две статьи в изданиях из списка ВАК.

Благодарности. Диссертационная работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00814, 11-01-00667, 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-97026).

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы, содержащего 115 наименований. Объем работы — 108 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дан обзор работ, близких к тематике диссертации, обоснована актуальность тематики исследований, сформулирована цель работы, изложено краткое содержание диссертации.

В первой главе диссертации приведена постановка задачи Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div}\, a(x,u,\nabla u) + a_0(x,u,\nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{2}$$

$\Omega \subset R^n$ — ограниченная многоугольная область, Γ — граница области Ω. Здесь $a(x,\eta) = (a_1(x,\eta), \ldots,\ a_n(x,\eta))$, $a_0(x,\eta)$ — заданные функции, непрерывные при $\bar{\eta} = (\eta_0, \eta) \in R^{n+1}$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in R^n$ для всех $x \in \Omega$.

Относительно коэффициентов задачи предполагаются выполненными условия ограниченной нелинейности, монотонности и коэрцитивности при $p > 1$:

$$|\bar{a}(x,\bar{\xi})| \leqslant c_1(1 + |\bar{\xi}|^{p-1}) \quad \forall x \in \Omega, \bar{\xi} \in R^{n+1}, \tag{3}$$

$$(\bar{a}(x,\bar{\xi}) - \bar{a}(x,\bar{\eta})) \cdot (\xi - \eta) \geqslant 0 \quad \forall x \in \Omega, \bar{\xi}, \bar{\eta} \in R^{n+1}, \tag{4}$$

$$\bar{a}(x,\bar{\xi}) \cdot \bar{\xi} \geqslant c_2|\xi|^p - c_3 \quad \forall x \in \Omega, \bar{\xi} \in R^{n+1} \tag{5}$$

здесь c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные, а через $\bar{a}(\cdot)$ обозначена вектор-функция вида $\bar{a}(\cdot) = (a_0(\cdot), a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot))$.

Эти условия являются довольно общими и допускают вырождение уравнения по градиенту на некоторой подобласти определения решения.

Кроме того, **во втором параграфе** рассмотрен случай, когда выполнены условия сильной монотонности и липшиц-непрерывности

$$\begin{gathered}\big(\bar{a}(x,\bar{\eta}) - \bar{a}(x,\bar{\xi})\big) \cdot (\eta - \xi)\left(|\eta| + |\xi|\right)^{2-p} \geqslant c_0|\eta - \xi|^2 \\ \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^{n+1}, \eta, \xi \in R^n,\ x \in \Omega,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\left|\bar{a}(x,\bar{\eta}) - \bar{a}(x,\bar{\xi})\right| \leqslant c_1|\bar{\eta} - \bar{\xi}|^{p-1} \quad \forall\, \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^{n+1},\ x \in \Omega, \tag{7}$$

в случае $1 < p < 2$ и

$$\begin{gathered}\big(\bar{a}(x,\bar{\eta}) - \bar{a}(x,\bar{\xi})\big) \cdot (\eta - \xi) \geqslant c_2|\eta - \xi|^p \\ \forall \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^{n+1}, \eta, \xi \in R^n,\ x \in \Omega,\end{gathered} \tag{8}$$

$$\left|\bar{a}(x,\bar{\eta}) - \bar{a}(x,\bar{\xi})\right| \leqslant c_3|\bar{\eta} - \bar{\xi}|\left(|\bar{\eta}| + |\bar{\xi}|\right)^{p-2} \quad \forall\, \bar{\eta}, \bar{\xi} \in R^{n+1},\ x \in \Omega, \tag{9}$$

в случае $p \geqslant 2$; c_0, c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные.

Определено понятие обобщенного решения задачи (1), (2). Обобщенным решением задачи (1), (2) называется функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega), p > 1$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$L(u, v) \equiv \int_\Omega (a(x, u, \nabla u) \cdot \nabla v + a_0(x, u, \nabla u)v)dx =$$

$$= \int_\Omega fv\, dx \equiv (f,\ v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),$$

В третьем параграфе дана смешанная постановка задачи (1), (2). Для этого введено в рассмотрение пространство

$$H_q = H_q(\mathrm{div}, \Omega) = \{j \in (L_q(\Omega))^n \mid \ \mathrm{div}\, j \in L_q(\Omega),\ 1 < q < \infty\}$$

с нормой $\|j\|^q_{H_q} = \int\limits_\Omega (|j|^q + |\,\mathrm{div}\, j|^q)\, dx$.

В качестве вспомогательной переменной при построении смешанной схемы выбран градиент искомого решения. Таким образом, положив $j = \nabla u$, нетрудно видеть, что если u — обобщенное решение задачи (1), (2), то

$$\int_\Omega a(x, u, j(u)) \cdot j(v) + a_0(x, u, j(u))v\, dx = \int_\Omega fv\, dx \ \ \forall v \in L_p(\Omega), \quad (10)$$

$$\int_\Omega j(u) \cdot q\, dx + \int_\Omega u\, \mathrm{div}\, q\, dx = 0 \quad \forall q \in H_q(\mathrm{div}, \Omega). \quad (11)$$

Система (10), (11) положена в основу смешанной постановки задачи (1), (2), а именно: разыскивается пара функций $(u, j) \in X = L_p(\Omega) \times (L_q(\Omega))^n$, удовлетворяющая интегральным тождествам (10), (11).

В четвертом параграфе описана конформная, регулярная триангуляция $\mathcal{T}_h = \bigcup K$ области Ω симплициальными и прямоугольными конечными элементами. Кроме того, описаны известные (см., например, [3]) пространства конечных элементов: $BDM_k(K)$, $RT_k(K)$,

$BDM_{[k]}(K)$, $RT_{[k]}(K)$. Определены конечноэлементные пространства

$$
\begin{aligned}
&M_h = \{v_h \in L_p(\Omega); v_h|_K \in M_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},\\
&N_h = \{q_h \in H_q; q|_K \in N_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\},\\
&X_h = M_h \times N_h,
\end{aligned}
$$

где $N_k(K)$ — одно из описанных пространств $BDM_k(K)$, $RT_k(K)$, $BDM_{[k]}(K)$, $RT_{[k]}(K)$, а через $M_k(K)$ обозначены следующие пространства полиномов:

– $P_{k-1}(K)$, если $N_k(K) = BDM_k(K)$ или $BDM_{[k]}(K)$;

– $P_k(K)$, если $N_k(K) = RT_k(K)$;

– $Q_k(K)$, если $N_k(K) = RT_{[k]}(K)$.

В пятом параграфе описан класс приближенных методов, исследуемых в диссертации. Под приближенным решением задачи (1), (2) понимается пара функций $(u_h, j_h) \in X_h$ таких, что

$$
\int\limits_\Omega (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h))v_h)\, dx = \int\limits_\Omega f v_h(x)\, dx \tag{12}
$$

для любых $v_h \in M_h$, где функция $j_h(u_h) \in N_h$ определяется по $u_h \in M_h$ как решение уравнения

$$
\int\limits_\Omega j_h(u_h) \cdot q_h\, dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h\, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \tag{13}
$$

Кроме того, сформулированы и доказаны лемммы, используемые при выводе оценок точности этих методов. Все эти результаты имеют место при выборе любого из пространств BDM_k, RT_k, $BDM_{[k]}$ или $RT_{[k]}$ для аппроксимации H_q.

Во второй главе диссертации изучен данный класс приближенных методов для задачи с монотонным оператором. Доказано, что имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Тогда задача* (12), (13) *имеет по крайней мере одно решение при любой правой части* $f \in L_q(\Omega)$. *Для любого решения задачи* (12), (13) *справедлива априорная оценка*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_q(\Omega)}$$

где c — *постоянная, не зависящая от* h.

Относительно сходимости последовательностей решений u_h и $j_h(u_h)$ в пространтсве $L_p(\Omega)$ справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3)–(5). *Тогда существуют последовательности решений* u_h *и* $j_h(u_h)$ *и функции* u^*, j^* *такие, что* $u_h \rightharpoonup u^*$, $j_h(u_h) \rightharpoonup j^*$ *в* $L_p(\Omega)$, *причем пара функций* u^*, j^* *является точным решением задачи* (10), (11).

Заменив условие монотонности (4) более сильным условием подчинения (см. [2])

$$|\bar{a}(x,\xi)-\bar{a}(x,\eta)| \leqslant c_4((\bar{a}(x,\xi)-\bar{a}(x,\eta))\cdot(\xi-\eta))^{\frac{1}{2}}(1+|\xi|^p+|\eta|^p)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r}} \quad (14)$$

для любых $\xi, \eta \in R^{n+1}$, где $r = \max(p, 2), p > 1$, нам удалось получить следующие результаты.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (3)–(5), (14). *Тогда «поток»* $\bar{a}(x, u, j(u))$, *построенный по решению задачи* (10), (11) *и его конечноэлементная аппроксимация* $\bar{a}(x, u_h, j_h(u_h))$, *построенная по решению задачи* (12), (13), *определяется исходными данными задачи* (1), (2) *однозначно.*

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3), (5), (14). *Тогда существует последовательность* $h \to 0$ *такая, что имеет место сильная сходимость* $a(x, u_h, j_h(u_h)) \to a(x, u, j(u))$ *в пространстве*

$L_s(\Omega)$, *где*

$$s = \begin{cases} q, p \geqslant 2, \\ 2, 1 < p < 2. \end{cases}$$

В третьей главе диссертации изучен построенный в первой главе класс приближенных методов для задачи с сильно монотонным оператором.

Относительно разрешимости приближенной задачи имеет место

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (6)–(9). *Тогда при любой правой части* $f \in L_q(\Omega)$ *решение задачи* (12), (13) *существует и единственно. При этом справедлива оценка*

$$\|j_h(u_h)\|_{L_p(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_q(\Omega)},$$

где c *— постоянная, не зависящая от* h.

Получены оценки точности рассмотренного приближенного метода. А именно, доказано, что имеет место

Теорема 5. *Пусть* u *— решение задачи* (1), (2) *— удовлетворяет условиям гладкости*

$$u \in W_p^{(k+1)}(\Omega),\ j \in \left(W_p^{(k+1)}(\Omega)\right)^n.$$

Пусть также каждая триангуляция области Ω *с меньшим шагом строится по триангуляции с большим шагом путем разбиения ее элементов. Тогда*

$$\|u - u_h\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j(u) - j_h(u_h)\|^p_{L_q(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant ch^{(k+1)\frac{p}{3-p}} \left(\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)} + \|j(u)\|^p_{W_q^{(k+1)}(\Omega)}\right) + ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}$$

в случае $1 < p < 2$ *и*

$$\|u_h - u\|^p_{L_p(\Omega)} + \|j_h(u_h) - j(u)\|^p_{L_q(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant ch^{q(k+1)}\left(\|u\|^q_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}+\|j(u)\|^q_{W_q^{(k+1)}(\Omega)}\right)+ch^{p(k+1)}\|u\|^p_{W_p^{(k+1)}(\Omega)}$$

в случае $p \geqslant 2$.

В четвертой главе диссертации построены и изучены итерационные методы для двух классов смешанных схем метода конечных элементов.

В первом параграфе рассмотрен частный случай задачи (1), (2)

$$-\operatorname{div} a(x,\nabla u)+a_0(x,\nabla u)=f(x), \quad x\in\Omega, \tag{15}$$

$$u(x)=0, \quad x\in\partial\Omega. \tag{16}$$

$\Omega\subset R^n$ — ограниченная многоугольная область, Γ — граница области Ω. Здесь $a(x,\xi)=(a_1(x,\xi),\dots,a_n(x,\xi))$, $\xi\in R^n$ для всех $x\in\Omega$. Относительно коэффициентов задачи предполагаются выполненными условия сильной монотонности (6) и липшиц-непрерывности (7) при $p=2$, а также условие на функцию $a_0(\cdot)$

$$(a_0(x,\xi)-a_0(x,\eta))\cdot(\xi-\eta)\geqslant 0.$$

Приведена смешанная постановка задачи (15), (16). В качестве вспомогательной переменной в этом случае использовался «поток», построенный по обощенному решению задачи (15), (16). При этом возникает необходимость использования обратной к $a(x,\cdot)$ функции $a^{-1}(x,\cdot): R^n\to R^n$, обладающей свойствами (см. 1]):

$$\left(a^{-1}(x,\xi)-a^{-1}(x,\eta)\right)\cdot(\xi-\eta)\geqslant c_3|\xi-\eta|^2 \quad \forall\xi,\eta\in R^n,\ x\in\Omega, \tag{17}$$

$$|a^{-1}(x,\xi)-a^{-1}(x,\eta)|\leqslant c_4|\xi-\eta| \quad \forall\,\xi,\eta\in R^n,\ x\in\Omega, \tag{18}$$

где c_3, c_4 — положительные постоянные.

Таким образом, если u — обобщенное решение задачи (15), (16), то $j\in H_2(\operatorname{div},\Omega)$ и выполнены интегральные тождества

$$\int\limits_\Omega [-\operatorname{div} j+a_0(x,u)]\,v\,dx=\int\limits_\Omega f(x)v(x)\,dx \ \ \forall v\in L_2(\Omega), \tag{19}$$

$$\int_\Omega a^{-1}(x,j)\cdot q\,dx + \int_\Omega u\,\mathrm{div}\,q\,dx = 0\ \forall q \in H_2(\mathrm{div},\Omega), \tag{20}$$

которые положены в основу смешанной постановки задачи (15), (16): разыскивается пара функций $(u,j) \in X = L_2(\Omega)\times H_2(\mathrm{div},\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам (19), (20).

Далее, дана приближенная постановка смешанной задачи. Отметим, что описанная в первом параграфе приближенная схема в случае, когда для аппроксимации $H_2(\mathrm{div},\Omega)$ выбирается пространство Равьяра — Тома, подробно рассмотрена в работе М.М. Карчевского и А.Е. Федотова [4]. Предполгается, что проведена конформная, регулярная триангуляция $\mathcal{T}_h$ области Ω. При построении смешанной схемы конечных элементов использовались конечномерные пространства M_h, N_h, опредленные в общем виде в первой главе. Под приближенным решением задачи (15), (16) понималась пара функций $(u_h, j_h) \in X_h = M_h \times N_h$, удовлетворяющих уравнениям

$$\int_\Omega (-\,\mathrm{div}\,j_h + a_0(x,u_h)v_h)dx = \int_\Omega f(x)v_h(x)dx, \tag{21}$$

$$\int_\Omega a^{-1}(x,\ j_h)\cdot q_h dx + \int_\Omega u_h\,\mathrm{div}\,q_h dx = 0 \quad \forall\,(v_h,q_h)\in X_h. \tag{22}$$

Во втором параграфе описан итерационный метод для решения задачи (21), (22), построенный в работе М.М. Карчевского и А.Е. Федотова [4]. Определен нелинейный конечномерный оператор A_h соотношением

$$A_h u_h\cdot v_h = \int_\Omega (-\,\mathrm{div}\,j(u_h) + a_0(x,u_h))v_h\,dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h, \tag{23}$$

где $j(u_h)\in N_h$ определяется уравнением

$$\int_\Omega a^{-1}(j_h(u_h))\cdot q_h dx + \int_\Omega u_h\,\mathrm{div}\,q_h\,dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \tag{24}$$

Матрица G_h определена соотношением

$$G_h u_h \cdot v_h = -\int\limits_\Omega \operatorname{div} j_h^*(u_h) v_h \, dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h, \tag{25}$$

где $j_h^*(u_h) \in N_h$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Omega j_h^*(u_h) \cdot q_h \, dx + \int\limits_\Omega u_h \operatorname{div} q_h \, dx = 0 \quad \forall q_h \in N_h. \tag{26}$$

Для решения задачи (21), (22) предлагается использовать следующий итерационный процесс:

$$G_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{27}$$

где u_h^0 задана, а $\tau > 0$ — итерационный параметр.

Реализация итерационного метода (27) может быть сведена к решению следующей системы уравнений с седловой матрицей:

$$\begin{aligned} B_h j_h^k \quad + C_h w_h^k &= 0, \\ C_h^T j_h^k \qquad\qquad &= r_h^k, \end{aligned} \tag{28}$$

$u_h^{k+1} = u_h^k + \tau w_h^k$. Здесь B_h и C_h матрицы, определяемые соотношениями

$$B_h j_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega j_h \cdot q_h \, dx \quad \forall j_h, q_h \in N_n, \tag{29}$$

$$C_h v_h \cdot q_h = \int\limits_\Omega v_h \operatorname{div} q_h \, dx \quad \forall v_h \in M_h, q_h \in N_n, \tag{30}$$

а C_h^T – транспонированная матрица C_h. Вектор r_h^k определён соотношением

$$r_h^k \cdot v_h = \int\limits_\Omega (-\operatorname{div} j_h^k + a_0(x, u_h^k) - f) v_h \, dx \quad \forall v_h \in M_h,$$

а j_h^k — решение уравнения

$$\int\limits_\Omega a^{-1}(j_h^k)\cdot q_h dx+\int\limits_\Omega u_h^k \operatorname{div} q_h\, dx=0\quad \forall q_h\in N_h. \tag{31}$$

В третьем параграфе рассмотрен важный для многих приложений, например, теории фильтрации, частный случай задачи (15), (16), когда $a_0\equiv 0$. Кроме того, введен в рассмотрение конечномерный нелинейный оператор L_h, определяемый соотношением

$$L_h(j_h)\cdot q_h=\int\limits_\Omega a^{-1}(x,j_h)\cdot q_h\, dx\quad \forall j_h,q_h\in N_n, \tag{32}$$

обладающий свойствами

$$(L_h(j_h)-L_h(q_h))\cdot(j_h-q_h)\geqslant c_5\|j_h-q_h\|^2_{B_h}, \tag{33}$$

$$\|L_h(j_h)-L_h(q_h)\|_{B_h^{-1}}\leqslant c_6\|j_h-q_h\|_{B_h} \tag{34}$$

для любых j_h,q_h из N_h.

Таким образом, задача (21), (22) записывается в виде

$$\begin{pmatrix} L_h & C_h\\ -C_h^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_h\\ u_h\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f_h\end{pmatrix}. \tag{35}$$

Для решения системы нелинейных уравнений (35) используется итерационный процесс

$$\begin{pmatrix} \tau^{-1}B_h & C_h\\ -C_h^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_h^{k+1}-j_h^k\\ u_h^{k+1}-u_h^k\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} L_h & C_h\\ -C_h^T & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_h^k\\ u_h^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ f_h\end{pmatrix}, \tag{36}$$

$k=0,1,\,\ldots,j_h^0,u_h^0$ заданы, $\tau>0$ — итерационный параметр.

Понятно, что при такой модификации метода (27) удается избежать применения «внутреннего» итерационного процесса, то есть решения уравнения (31).

В четвертом параграфе исследована сходимость построенного итерационного метода. Доказана общая теорема о сходимости итерационных процессов вида (36).

Т е о р е м а 6. *Пусть матрицы* B_h, $D_h = C_h^T B_h^{-1} C_h$ *положительно определены, оператор* L_h *удовлетворяет условиям* (33), (34),

$$0 < \tau < 2c_6/c_5^2.$$

Тогда итерационный процесс (36) *сходится при любом начальном приближении* j_h^0, u_h^0.

Из этой теоремы, в частности, следует сходимость предложенного в третьем параграфе итерационного метода.

Если дополнительно к условиям этой теоремы оператор L_h является диффернцируемым по Гато и его производная симметрична, то оценка скорости сходимости итерационного метода (36) может быть улучшена. Справедлива

Т е о р е м а 7. *Пусть оператор* $L_h(j_h)$ *имеет производную Гато* $L'_h(j_h)$ *в каждой точке пространтства* N_h, *которая при любом* $g_h \in N_h$ *удовлетворяет условиям*

$$c_{10}\|g_h\|^2_{B_h} \leqslant L'_h(j_h)g_h \cdot g_h \leqslant c_{11}\|g_h\|^2_{B_h}. \tag{37}$$

Тогда при $\tau = \tau_0 = 2/(c_{10} + c_{11})$ *итерационный метод* (36) *сходится и для погрешностей верны оценки:*

$$\|j_h^{k+1} - j\|_{B_h} \leqslant \rho(\tau)\|j_h^k - j\|_{B_h},$$

$$\|u_h^{k+1} - u\|_{D_h} \leqslant \rho(\tau)\|u_h^k - u\|_{D_h},$$

где $\rho(\tau) = (1 - \xi)/(1 + \xi), \xi = c_{10}/c_{11}$.

В пятом параграфе приведены примеры численной реализации представленного итерационного метода.

Шестой параграф посвящен описанию построенного в работе А.Е. Федотова [1] итерационного метода для решения приближенной задачи (12), (13) с оператором, который удовлетворяет лишь условию монотонности.

Введен в рассмотрение нелинейный оператор $A_h : M_h \to M_h$, линейный оператор $R_h : M_h \to M_h$ при помощи сооотношений

$$A_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega (a(x, u_h, j_h(u_h)) \cdot j_h(v_h) + a_0(x, u_h, j_h(u_h)) v_h) dx$$

$$\forall\, u_h, v_h \in M_h,$$

$$R_h u_h \cdot v_h = \int\limits_\Omega j_h(u_h) \cdot j_h(v_h) dx \quad \forall u_h, v_h \in M_h,$$

а также вектор $f_h \in M_h$.

Последовательные приближения в итерационном процессе, определяются путем решения уравнений

$$R_h \frac{u_h^{k+1} - u_h^k}{\tau} + A_h u_h^k = f_h,\ k = 0, 1, \ldots, \tag{38}$$

где u_h^0 задано.

Реализация этого итерационного метода подразумевает вычисление вектора невязки $r_h^k = A_h u_h^k - f_h$ по известному $u_h^k \in M_h$ и решение уравнения

$$R_h w_h = -r_h^k, \tag{39}$$

относительно поправки $w_h = (u_h^{k+1} - u_h^k)/\tau$.

При вычислении значения $A_h u_h^k$ на каждом шаге итерационного метода (38) приходится решать систему линейных уравнений вида (13) относительно $j_h(u_h^k)$. **В седьмом параграфе** предлагается модификация итерационного метода (38), при реализации которой данная операция опускается. Дискретная задача (12), (13) представляется в виде

$$B_h j_h + C_h u_h = 0,$$

$$L_h(u_h, j_h) = f_h,$$

где

$$L_h(u_h, j_h) = -C_h^T B_h^{-1} l_h(u_h, j_h) + l_{0,h}(u_h, j_h),$$

$$l_h(u_h, j_h) \cdot q_h = \int\limits_\Omega a(x, u_h, j_h) \cdot q_h dx \quad \forall q_h \in N_h,$$

$$l_{0,h}(u_h, j_h) \cdot v_h = \int\limits_\Omega a_0(u_h, j_h, u_h) v_h dx \quad \forall v_h \in M_h.$$

Предложенный итерационный процесс записывается в виде

$$B_h j_h^{k+1} + C_h u_h^{k+1} = 0, \tag{40}$$

$$-C_h^T j_h^{k+1} = -C_h^T j_h^k + \tau(L_h(u_h^k, j_h^k) - f_h). \tag{41}$$

При реализации данного метода на каждом шаге по сравнению с методом (38) экономится одно обращение матрицы масс.

При начальном приближении u_h^0, j_h^0 таком, что $B_h j_h^0 + C_h u_h^0 = 0$, и выполнении условий (5) и (14) при $p = 2$ имеет место сходимость итерационного метода (40), (41) по невязке.

В восьмом параграфе приведены примеры численной реализации предложенной модификации итерационного метода (40), (41).

Основные результаты диссертации:

1. Теоремы о сходимости смешанных схем МКЭ для задач с квазилинейными монотонными операторами в пространствах $W_p^{(1)}$.

2. Оценки точности смешанных схем МКЭ для задач с квазилинейными сильно монотонными операторами в пространствах $W_p^{(1)}$.

3. Модификации итерационных методов решения смешанных схем МКЭ для уравнений с монотонными и сильно монотонными операторами в пространстве $W_2^{(1)}$.

4. Оценки скорости сходимости модифицированного итерационного метода решения смешанных схем МКЭ для задач с сильно монотонными операторами в пространстве $W_2^{(1)}$.

Опубликованные работы по теме диссертации

В резенцируемых изданиях из списка ВАК

1. Гогин, А.П. Об одном итерационном методе для смешанных схем конечных элементов / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Ученые записки Казанского ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2011, т. 154, кн. 4, с. 5–10.

2. Гогин, А.П. Об оценках погрешности одного варианта смешанного метода конечных элементов / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Ученые записки Казанского ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2013, т. 155, кн. 2, с. 44-53.

В других изданиях

3. Гогин, А.П. Итерационный метод для смешанных схем конечных элементов / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическая теория управления и математическое моделирование», Ижевск, 15-18 мая 2012 г. — с. 15–17.

4. Гогин, А.П. Об итерационных методах для некоторых классов смешанных схем для квазилинейных эллиптических уравнений / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Материалы Девятой Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Казань, 17–21 сентября 2012 г. — Казань: Отечество. – 2012. – с. 90–94.

5. Gogin, A.P. An iterative method for mixed finite element schemes / A.P. Gogin, M.M. Karchevsky // Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 33, Issue 4 (2012). — pp. 400–404 (Перевод на английский статьи: Гогин, А.П. Об одном итерационном методе для смешанных схем конечных элементов / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Ученые записки Казанского ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2011, т. 154, кн 4, с. 5–10.).

6. Гогин, А.П. О сходимости одного класса смешанных методов для квазилинейных эллиптических уравнений / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Материалы XII Всероссийской молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения–2013". — Казань, 2013. с. 29–31.

7. Гогин, А.П. Об оценках точности одного варианта смешанного метода конечных элементов / А.П. Гогин, М.М. Карчевский // Материалы XVIII Международной конференции по вычислительной механике и современным программным системам, 22–31 мая 2013, г. Алушта с. 66–68.

Цитированная литература

1. **Федотов, А.Е.** Смешанный метод конечных элементов для квазилинейных эллиптических уравнений: дисс. на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук — Казань, 2007. — 112 с.

2. **Яковлев, Г.Н.** Некоторые свойства решений квазилинейных эллиптических уравнений. Труды Математического института АН СССР — 1975, т. 134, с. 389–404.

3. **Brezzi, F.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin. — Springer series in Comp. Math., 1991.

4. **Karchevsky, M.M.** Error estimates and iterative procedure for mixed finite element solution of second-order quasi-linear elliptic problems / M.M. Karchevsky, A.E. Fedotov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – V. 4. – No 4. – pp 445–463.